Sensorveiledning – nasjonal deleksamen GLU 5–10, 30.11.23

Maksimal poengsum er 33. Merk at noen oppgaver skåres 1 eller 0, og andre 2, 1 eller 0.

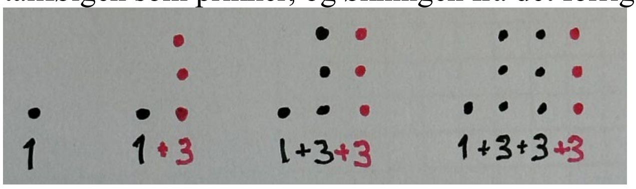
Karaktergrenser
A: 29
B: 24
C: 19
D: 17
E: 15

Oppgave 1a)

2 poeng

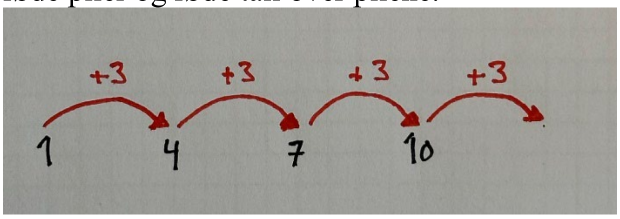
Kandidaten beskriver tilfredsstillende et mønster både med ord og illustrasjoner, og kandidaten bruker det til å finne det femte leddet i tallfølgen. For å få 2 poeng må mønsteret komme tydelig fram. Nedenfor er det to eksempler:

Eksempel 1 – figurtall:
Tallfølgen starter på 1 og mønsteret er at hvert ledd øker med tre. Jeg illustrerer leddene i tallfølgen som prikker, og økningen fra det forrige leddet med røde prikker og røde tall.



Det femte leddet er derfor $1 + 3 + 3 + 3 + 3 = 13$.

Eksempel 2 – piler:
Mønsteret er at hvert ledd øker med tre. Jeg illustrerer økningen fra det forrige leddet med røde piler og røde tall over pilene.

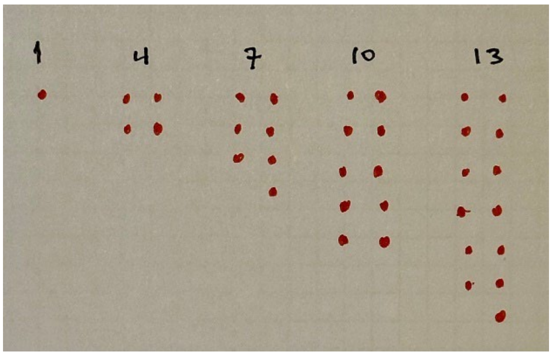


Det femte leddet er derfor $10 + 3 = 13$, og tallfølgen blir $1, 4, 7, 10, 13, \ldots$

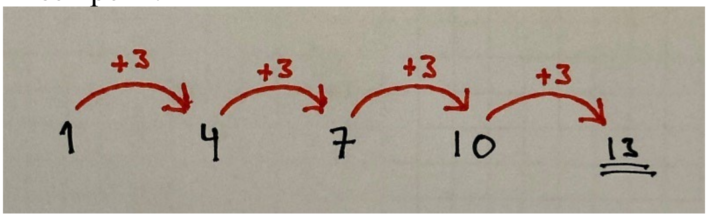
1 poeng

Kandidaten beskriver et mønster med både ord og illustrasjon og bruker det til å finne det femte leddet i tallfølgen, men beskrivelsen inneholder enkelte unøyaktigheter. Det gis også 1 poeng dersom kandidaten beskriver tilfredsstillende et mønster bare med ord eller bare med illustrasjoner, og kandidaten bruker det til å finne det femte leddet i tallfølgen. Nedenfor er det to eksempler:

Eksempel 1:
Mønsteret er at hvert ledd øker med tre. Det femte leddet er 13.



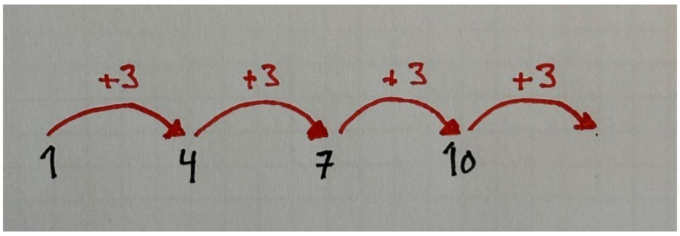
Eksempel 2:



Det gis 0 poeng dersom kandidaten bare skriver 13 eller bare beskriver et mønster.

Oppgave 1b)
2 poeng
Kandidaten viser tilfredsstillende, på to ulike måter, hvordan en finner riktig algebraisk uttrykk for det n-te leddet. Nedenfor er det et eksempel:

Måte 1:
På illustrasjonen min med piler ser jeg at det første leddet kan skrives som $1 + 0 \cdot 3$, den andre leddet som $1 + 1 \cdot 3$, det tredje leddet som $1 + 2 \cdot 3$, det fjerde leddet som $1 + 3 \cdot 3$, osv. Det n-te leddet kan derfor uttrykkes algebraisk som $1 + (n - 1) \cdot 3$, som er det samme som $3n - 2$.



Måte 2:
Jeg leter etter en sammenheng mellom leddet og leddnummeret, og setter det systematisk opp slik

1. ledd: $1 = 1 \cdot 3 - 2$
2. ledd: $4 = 2 \cdot 3 - 2$
3. ledd: $7 = 3 \cdot 3 - 2$
4. ledd: $10 = 4 \cdot 3 - 2$

Jeg ser at leddene i tallfølgen kan uttrykkes som leddnummeret ganget med 3 minus 2. Det n-te leddet kan derfor uttrykkes algebraisk som $n \cdot 3 - 2$, som er det samme som $3n - 2$.

1 poeng
Kandidaten viser tilfredsstillende på kun én måte hvordan en finner riktig algebraisk uttrykk for det n-te leddet, eller finner på to ulike måter riktig algebraisk uttrykk for det n-te leddet uten å vise tilfredsstillende framgangsmåter.

Det gis 0 poeng dersom kandidaten bare oppgir riktig algebraisk uttrykk.

Oppgave 1c)
1 poeng
Kandidaten beskriver tilfredsstillende hvordan en kan bruke regneark til å finne de 100 første leddene i tallfølgen. Nedenfor er det et eksempel:

I cellene A1–A4 skriver jeg suksessivt inn de fire første leddene i tallfølgen, 1, 4, 7, 10. Jeg holder så nede venstre musetast samtidig som jeg markerer cellene A1–A4, før jeg slipper musetasten og drar musepekeren ned i høyre hjørne, slik at + kommer til syne. Jeg trykker så inn venstre musetast igjen og markerer videre nedover til og med celle A100. Regnearket vil da gi meg de 100 første leddene i tallfølgen i cellene A1-A100.

Oppgave 1d)
2 poeng
Kandidaten svarer at 300 ikke er et ledd i tallfølgen og begrunner svaret tilfredsstillende på to ulike måter. Nedenfor er det et eksempel:

Måte 1:
Jeg løser $3n - 2 = 300$, og finner at $n = \frac{302}{3} = 100\frac{2}{3}$, som viser at 300 ikke er et ledd i tallfølgen.

Måte 2:
300 er ikke et ledd i tallfølgen fordi hvert ledd i tallfølgen er to mindre enn et tall i tre-gangen, og 300 er i tre-gangen.

1 poeng
Kandidaten svarer at 300 ikke er et ledd i tallfølgen og begrunner svaret på én tilfredsstillende måte, eller svarer at 300 ikke er et ledd i tallfølgen og begrunner svaret på to ulike måter med enkelte unøyaktigheter.

Det gis 0 poeng dersom kandidaten ikke begrunner at 300 ikke er et ledd i tallfølgen.

Oppgave 2a)
1 poeng
Kandidaten svarer riktig, 19, og viser tilfredsstillende framgangsmåte. Nedenfor er det et eksempel:

$2 \cdot 3^2 + 1 = 2 \cdot 9 + 1 = 18 + 1 = 19$

Oppgave 2b)
1 poeng
Kandidaten gir to eksempler på feil som elever typisk gjør når de løser oppgaven. Nedenfor er det tre eksempler:

1. Elever multipliserer grunntallet med 2 og beholder eksponenten: $2 \cdot 3^2 = 6^2 = 36$.
2. Elever multipliserer både grunntallet og eksponenten med 2: $2 \cdot 3^2 = 6^4 = 1296$.
3. Elever multipliserer grunntallet 3 med eksponenten 2 og får 6, som deretter multipliseres med tallet 2: $2 \cdot 3^2 = 2 \cdot 6 = 12$.

Oppgave 2c)
1 poeng
Kandidaten svarer at uttrykk iv) egner seg dårligst.

Kandidaten behøver ikke å begrunne valget, men vi argumenterer her for og imot de ulike alternativene. En vanlig feil som elever gjør, er at de multipliserer grunntallet med eksponenten. Andre mindre vanlige feil er å bytte om rollene til grunntallet og eksponenten, eller å tolke uttrykket som en annen regneoperasjon (f.eks. addisjon). En god kartleggingsoppgave er da en oppgave som kan avsløre om elevene gjør en av disse feilene, mens en dårlig kartleggingsoppgave vil være en oppgave hvor en kan få riktig svar selv om en gjør de vanlige feilene.

Ved å bruke uttrykk i) vil en elev, som feilaktig multipliserer grunntallet med eksponenten få 9 ($3 \cdot 3$) og ikke 27, og læreren kan avgjøre at eleven tenkte feil. Om eleven bytter om rollene til eksponenten og grunntallet og deretter regner riktig, vil eleven få 27, og læreren kan ikke avgjøre at eleven tenkte feil. Om eleven legger sammen grunntallet og eksponenten, vil eleven få 6, og læreren kan avgjøre at eleven tenkte feil. Den mest vanlige elevfeilen kan avsløres med denne oppgaven.

Ved å bruke uttrykk ii) vil en elev, som feilaktig multipliserer grunntallet med eksponenten få 6 ($3 \cdot 2$) og ikke 9, og læreren kan avgjøre at eleven tenkte feil. Om eleven bytter om rollene til eksponenten og grunntallet og deretter regner riktig, vil eleven få $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$, og læreren kan avgjøre at eleven tenkte feil. Om eleven legger sammen grunntallet og eksponenten, vil eleven få 5, og læreren kan igjen avgjøre at eleven tenkte feil.

Ved å bruke uttrykk iii) vil en elev, som feilaktig multipliserer grunntallet med eksponenten få 6 ($2 \cdot 3$) og ikke 8, og læreren kan avgjøre at eleven tenkte feil. Om eleven bytter om rollene til eksponenten og grunntallet og deretter regner riktig, vil eleven få $3 \cdot 3 = 9$, og læreren kan avgjøre at eleven tenkte feil. Om eleven legger sammen grunntallet og eksponenten, vil eleven få 5, og læreren kan igjen avgjøre at eleven tenkte feil.

Ved å bruke uttrykk iv) vil en elev, som feilaktig multipliserer grunntallet med eksponenten få riktig svar $2 \cdot 2 = 4$, og svaret avslører ikke for læreren at eleven tenkte feil. Om eleven bytter om rollen til grunntallet og eksponenten, vil eleven få riktig svar $2 \cdot 2 = 4$, og svaret avslører ikke at eleven tenkte feil. Om eleven legger sammen grunntallet og eksponenten, vil eleven få $2 + 2 = 4$ som heller ikke avslører elevens feil. Ved å bruke uttrykk iv) er det mulig å få riktig svar ved å regne feil på flere måter, og dette uttrykket er da minst egnet til å kartlegge elevers feil.

Oppgave 2d)
1 poeng
Kandidaten gir tilfredsstillende begrunnelser tilpasset elever på 10. trinn for at i) er feil og ii) er riktig. En tilfredsstillende begrunnelse er å bruke definisjonen på potenser når eksponenten er et heltall større eller lik 2 og vise at uttrykkene på hver side av likhetstegnet er like (riktig) eller ulike (feil), for eksempel slik:

Påstand i):
Høyre side: $(a \cdot b)^n = \underbrace{(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot \ldots \cdot (a \cdot b)}_{n \text{ faktorer } a \cdot b} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ faktorer } a} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{n \text{ faktorer } b} = a^n \cdot b^n$.

Siden høyre side, $(a \cdot b)^n$, er ulik venstre side, $a \cdot b^n$, er påstand i) feil.
Påstand ii):
I påstand ii) har en (som en ofte gjør i algebraiske uttrykk) unnlatt å skrive multiplikasjonstegnet ·, som betyr at høyresiden i uttrykk ii) er det samme som høyresiden i uttrykk i), det vil si at $(ab)^n = (a \cdot b)^n$. Bruker så samme faktorisering som over, og får at $(ab)^n = (a \cdot b)^n = \underbrace{(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot \ldots \cdot (a \cdot b)}_{n \text{ faktorer } a \cdot b} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ faktorer } a} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{n \text{ faktorer } b} = a^n \cdot b^n$.

Det betyr at $(ab)^n = a^n \cdot b^n$, og påstand ii) er riktig.

Oppgave 3a)
1 poeng
Kandidaten avgjør at det elev 2 sier er riktig og gir tilfredsstillende begrunnelse. Nedenfor er det et eksempel:

For å avgjøre og begrunne om det elev 2 sier er riktig, kan jeg regne ut arealet slik:
$\text{stort areal} - \text{lite areal} = 6 \cdot 6 - 2 \cdot 2 = 36 - 4 = 32$. Ja, det elev 2 sier er riktig.

Oppgave 3b)
1 poeng
Kandidaten finner arealet av det blå området gitt tallene som elev 3 vil bruke og viser tilfredsstillende framgangsmåte. Nedenfor er det et eksempel:

Jeg kan regne ut arealet av det blå området, gitt de tallene som elev 3 vil bruke, slik:
$(5+1)(5+1) - (5-1)(5-1) = 6 \cdot 6 - 4 \cdot 4 = 36 - 16 = 20$. Arealet er 20.

Oppgave 3c)
1 poeng
Kandidaten viser algebraisk at det eleven på 10. trinn sier er riktig. Nedenfor er det et eksempel:

Om en bytter ut tallene med bokstaver slik eleven på 10. trinn sier, får jeg følgende utregning for arealet av det blå kvadratet:

$(a+b)(a+b) - (a-b)(a-b) = a^2 + ab + ab + b^2 - (a^2 - ab - ab + b^2) =$
$a^2 + 2ab + b^2 - (a^2 - 2ab + b^2) = a^2 + 2ab + b^2 - a^2 + 2ab - b^2 = 4ab$.
Ja, det eleven på 10. trinn sier er riktig.

Oppgave 4a)
1 poeng
Kandidaten fyller riktig inn i de tomme rutene og viser tilfredsstillende hvordan x regnes ut. Nedenfor er det et eksempel:

<table>
<tr><td colspan="2">6</td><td colspan="2">x</td><td colspan="2">7</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">$6+x$</td><td colspan="2">$x+7$</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="2">23</td><td colspan="2"></td></tr>
</table>

For å finne x kan jeg løse likningen
$(6+x)+(x+7)=23.$
$2x=23-6-7$
$2x=10$
$x=5$

Oppgave 4b)
2 poeng
Kandidaten begrunner tilfredsstillende om hvert steg i elevens utregning er riktig eller feil. Nedenfor er det et eksempel:

Det første steget er feil fordi 6 og x har blitt til $6x$ og ikke $6+x$. Tilsvarende gjelder for 7 og x, som har blitt til $7x$ og ikke $7+x$. Det neste steget er riktig gitt feil utgangspunkt (følgefeil), når eleven skriver $6x+7x=23$. Det neste steget i løsningsprosessen, å trekke sammen til $13x=23$, er riktig. I neste steg er 13 feilaktig splittet fra $13x$ og flyttet over på den andre siden av likhetstegnet, som om 13 var et positivt ledd på venstre side av likhetstegnet. $13x$ betyr $13 \cdot x$ og vi kan derfor ikke fjerne en faktor lik 13 ved subtraksjon av 13. Det siste steget, selve subtraksjonen av 23 og 13, er riktig gitt feil utgangspunkt, men svaret, $x=10$, er feil på grunn av de tidligere feilene.

1 poeng
Kandidaten begrunner om hvert steg i elevens utregning er riktig eller feil, men begrunnelsen inneholder enkelte unøyaktigheter.

Oppgave 4c)
2 poeng
Kandidaten fyller riktig inn i de tomme rutene og bruker dette til å sette opp og løse likningssettet tilfredsstillende. Nedenfor er det et eksempel:

<table>
<tr><td colspan="2">5</td><td colspan="2">x</td><td colspan="2">y</td><td colspan="2">3</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">$5+x$</td><td colspan="2">$x+y$</td><td colspan="2">$y+3$</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="2">10</td><td colspan="2">7</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="3"></td><td colspan="2">17</td><td colspan="3"></td></tr>
</table>

Addisjonstrekanten gir meg nå følgende likningssett:

Likning 1: $5+x+x+y=10 \iff 2x+y=5$

Likning 2: $x+y+y+3=7 \iff x+2y=4$

Dette likningssettet kan jeg for eksempel løse ved å skrive likning 1 som $y=5-2x$ og sette inn i likning 2:

$x + 2(5 - 2x) = 4 \Leftrightarrow x = 2$, og innsatt i likning 1 er da $y = 5 - 4 = 1$.

1 poeng
Kandidaten fyller riktig inn i de tomme rutene og bruker dette til å sette opp likningssettet, men klarer ikke å løse det.

Oppgave 5a)
2 poeng
Kandidaten løser alle tre deloppgavene i)–iii) tilfredsstillende. Nedenfor er det et eksempel:

i) $4a$
ii) $a + 4a$
iii) Sina er 6 år og moren er 24 år, eller Sina er 13 år og moren er 52 år.

Det gis også 2 poeng om ii) løses som $a + 4a = 5a$ eller $5a$.

1 poeng
Kandidaten løser to av tre deloppgaver tilfredsstillende.

Oppgave 5b)
1 poeng
Kandidaten lager et annet tilfredsstillende eksempel som gir svaret $\frac{5a+\frac{a}{2}}{3}$. Nedenfor er det et eksempel:

Lillesøstera til Sina er halvparten så gammel som Sina. Skriv et uttrykk for gjennomsnittsalderen til Sina, mora og lillesøstera.

Det gis 0 poeng om kandidaten mangler tilleggsopplysningen eller oppgaveformuleringen.

Oppgave 6
2 poeng
Kandidaten avgjør at det er mulig å finne tall som gjør utsagnene i), iii) og iv) sanne, og at det ikke er mulig å finne tall som gjør utsagnene ii) og v) sanne.

1 poeng
Kandidaten svarer feil for ett av utsagnene.

Det gis 0 poeng om kandidaten svarer feil for to eller flere av utsagnene.

Oppgave 7
2 poeng

Kandidaten avgjør at i), iii) og iv) viser at eleven mest sannsynlig har forstått hvorfor algoritmen for divisjon av brøk er riktig, og at ii) viser at eleven mest sannsynlig ikke har forstått hvorfor algoritmen er riktig.

1 poeng
Kandidaten avgjør feil for ett av svarene i)–iv).

Det gis 0 poeng om kandidaten avgjør feil for to eller flere av svarene i)–iv).

Det er ikke nødvendig at kandidaten begrunner valgene sine, men det kan argumenteres for og imot de ulike svarene. I oppgaven skal en vurdere om ulike elevforklaringer viser at eleven mest sannsynlig har forstått algoritmen hvor divisjon med brøk kan erstattes med multiplikasjon av den inverse brøken. En eventuell begrunnelse bør inkludere argumenter for at algoritmen er riktig og ikke bare en beskrivelse av hva regelen er, for eksempel slik:

i) Eleven skriver om den horisontale divisjonen $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$ til vertikal brøkform $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$. Deretter multipliseres brøken med 1 skrevet som $\frac{\frac{d}{c}}{\frac{d}{c}}$, siden det å multiplisere en brøk med 1 ikke endrer brøkens verdi. Etter multiplikasjonen blir telleren $\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$, som er det samme som $\frac{ad}{bc}$, mens nevneren blir 1 og kan sløyfes. Dette er en riktig forklaring og eleven har mest sannsynlig forstått hvorfor algoritmen fungerer.

ii) Eleven sier med ord at brøkdivisjon er det samme som å kryssmultiplisere ($\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$). Selv om dette er riktig, så er det bare en beskrivelse av algoritmen og inneholder ikke argumenter for hvorfor algoritmen er riktig.

iii) Eleven finner først felles nevner for de to brøkene. Med samme nevner i de to brøkene, så blir divisjonen å finne ut hvor mange ganger telleren i divisoren går opp i telleren i dividenden. Dette er en riktig forklaring og eleven har mest sannsynlig forstått hvorfor algoritmen fungerer.

iv) Eleven observerer først at $\frac{ad}{bc} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{b}$ og resonerer deretter at divisjon med $\frac{c}{d}$ på begge sider av likhetstegnet gir $\frac{ad}{bc} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d}$. Eleven bruker her den generelle egenskapen om $x \cdot y = z$ så er $\frac{z}{y} = x$. Selv om dette ikke er en fullstendig forklaring, så er det riktig, og eleven har mest sannsynlig forstått hvorfor algoritmen fungerer.

Oppgave 8a)
2 poeng
Kandidaten gir et eksempel som viser sammenhengen mellom konstant prosentvis endring, vekstfaktor og eksponentialfunksjoner. Nedenfor er det et eksempel:

1000 kr settes i banken til 5 % rente slik at beløpet årlig vokser med vekstfaktoren $1 + \frac{5}{100} = \frac{105}{100} = 1{,}05$. Etter x år vil beløpet ha vokst til $y = 1000 \cdot (1{,}05)^x$, som er en eksponentialfunksjon. Generelt kan en eksponentialfunksjon skrives på formen $y = ab^x$ hvor a betegner startverdien, b er vekstfaktoren og x er tidsvariabelen.

1 poeng
Kandidaten gir et eksempel som viser sammenhengen mellom to av begrepene, for eksempel sammenhengen mellom konstant prosentvis endring og vekstfaktor.

Det gis 0 poeng dersom kandidaten ikke viser en sammenheng mellom noen av de tre begrepene.

Oppgave 8b)
1 poeng
Kandidaten formuler en oppgave, tilpasset elever på 10. trinn, som utforsker sammenhengen mellom vekstfaktor og eksponentiell vekst. En mulighet for å utforske sammenhengen mellom vekstfaktor og eksponentiell vekst er å inkludere bruk av digitale hjelpemidler, for eksempel et dynamisk geometriprogram (men det er ikke et krav da en kan utforske også uten bruk av digitale hjelpemiddel). Nedenfor er det et eksempel:

Du setter inn 10 000 kr på en bankkonto og får 5 % rente på innestående beløp.

i) Hvor mye har du innestående på kontoen etter 1, 3, 5 og 7 år?
ii) Oppgi vekstfaktoren og angi en funksjon som beskriver innestående beløp på kontoen etter x år.
iii) Bruk GeoGebra, med ulike vekstfaktorer, til å til å utforske innestående beløp på kontoen over tid.

Det gis 0 poeng dersom oppgaven ikke inneholder element av utforskning.

Oppgave 9a)
2 poeng
Kandidaten beskriver tilfredsstillende hvert steg i elevens løsning og avgjør at 44 kg er riktig svar. Nedenfor er det et eksempel:

Eleven løser oppgaven ved bruk av figurer med rektangler («bar modeling»). Eleven lager fire figurer, som hver består av to eller tre linjer med rektangler.
I figur 1 får eleven fram at Ola og Per til sammen veier 95 kg.
I figur 2 får eleven fram at Per veier 7 kg mer enn Ola.
I figur 3 starter eleven på selve løsningsprosessen, hvor han bytter om på linje to og tre for å samle informasjonen om Ola på én linje. Da blir det tydelig at linje 1 kan deles opp i henholdsvis 7 og 88 kg.
I figur 4 klarer eleven å løse oppgaven ved å utnytte at linje 1 og 2 viser at det dobbelte av Ola sin vekt tilsvarer 88 kg, og med det kan konkludere med at Ola veier 44 kg. Eleven har markert riktig svar med å sette en ring rundt 44.

For å få 2 poeng må alle delene i elevens løsning komme fram i beskrivelsen.

1 poeng
Kandidaten beskriver elevens løsning og avgjør at 44 kg er riktig svar, men beskrivelsen inneholder enkelte unøyaktigheter. Nedenfor er det fire eksempler på unøyaktigheter:

- beskriver ikke hvert steg i elevens løsning tilstrekkelig nøye
- beskriver ikke alle stegene i elevens løsning
- tydeliggjør ikke hvor figurene gjenspeiler informasjonen i oppgaveteksten
- er ikke tydelig på at eleven svarte riktig

Det gis 0 poeng om beskrivelsen har vesentlige mangler, eller at kandidaten bare avgjør at eleven svarte riktig.

Oppgave 9b)
2 poeng
Kandidaten definerer den ukjente og viser tilfredsstillende hvordan en kan løse oppgaven ved bruk av likning. Nedenfor er det et eksempel:

Jeg kaller antallet kg som Ola veier, for x. Jeg får da følgende likning som jeg kan løse:
$x + (x + 7) = 95$
$2x + 7 = 95$
$2x = 88$
$x = 44$

Ola veier 44 kg.

1 poeng
Kandidaten viser tilfredsstillende hvordan en kan løse oppgaven ved bruk av likning, men definisjonen av den ukjente inneholder enkelte unøyaktigheter eller mangler. Nedenfor er det et eksempel.

Jeg kaller Ola for x og får likningen:
$x + (x + 7) = 95$
$2x + 7 = 95$
$2x = 88$
$x = 44$

Ola veier 44 kg.